УДК 517.4

В. В. МОРОЗ
Хмельницький національний університет

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БАГАТОШАРОВІЙ КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПЛАСТИНІ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В КРАЙОВИХ УМОВАХ ТА УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом інтегрального перетворення Фур'є зі спектральним параметром в крайових умовах та умовах спряження побудовано розв'язок задачі теплопровідності для багатошарової кусково-однорідної ізотропної пластини.

The method of integral transformation of Fourier with a spectral parameter in border conditions and conjugating conditions is build the solving of problem of heat conducting for multi-layered cobbed-homogeneous isotropic plate.

Нестаціонарна задача теплопровідності для кільчастої циліндрично-анізотропної багатошарової пластини розглянута в монографії [1]. Методом гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду – Фур'є – Бесселля – … – Бесселя – Фур'є побудовано розв'язок задачі в припущенні, що границі пластини та її шарів є жорстикими в сенсі теплопровідності. В даній роботі побудовано розв'язок задачі теплопровідності для багатошарової пластини при наявності похідних по часу в крайових умовах та умовах спряження шарів.

Розглянемо багатошарову кусково-однорідну ізотропну пластинку сталої товщини 2δ, нормаллю до площини теплової симетрії якої служить вісь Oz. Пластина нагрівається неперервно розподіленими тепловими джерелами щільністю $\omega_t(M,\tau)$ та зовнішнім середовищем, теплообмін через поверхню пластини із яким здійснюється за законом Ньютона. Припускається, що теплофізичні характеристики матеріалу пластинки не залежать від температури. Як показано в [2], температура t_j пластинки в будь-якій точці j-го шару при малих δ таких, що відношення z/δ зберігається сталим, може бути знайдена наближено за формулою:

$$t_j = T_{1j} + T_{2j}\cdot\frac{z}{\delta},\ \ (j=\overline{1, n+1}), \tag{1}$$

де T_{1j} – усереднена температура j-го шару, T_{2j} – температурний вплив сусідніх шарів або зовнішнього середовища (для граничних шарів). У припущенні, що задача теплопровідності симетрична відносно серединної площини $z=0$ пластинки, приходимо до наступної задачі відносно невідомих T_{1j} та T_{2j} ($j=\overline{1, n+1}$): побудувати обмежений на множині

$$D_n^{++} = \{(x,y,\tau):\ x\in I_n^+,\ y\in\mathbf{R},\ \tau>0\}\ ,\ \ I_n^+ = \bigcup_{k=1}^{n+1}(l_{k-1},l_k),\ l_0=0,\ l_{n+1}=\infty$$

розв'язок сепаратної системи рівнянь в частинних похідних:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\begin{pmatrix}T_{1j}\\ T_{2j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_j^2 & 0\\ 0 & a_j^2\end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix}T_{1j}\\ T_{2j}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha_{11}^j & \alpha_{12}^j\\ \alpha_{21}^j & \alpha_{22}^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_{1j}\\ T_{2j}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f_{1j}\\ f_{2j}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $l_{j-1} < x < l_j$, $j=\overline{1, n+1}$, $y\in\mathbf{R}$, $\tau>0$, з початковими умовами:

$$\left.\begin{pmatrix}T_{1j}\\ T_{2j}\end{pmatrix}\right|_{\tau=0} = \begin{pmatrix}g_{1j}\\ g_{2j}\end{pmatrix},\ \ (x,y)\in I_n^+\times\mathbf{R}\ ,\ (j=\overline{1, n+1}), \tag{3}$$

крайовими умовами:

$$h_{11}^0\begin{pmatrix}T_{11}\\ T_{21}\end{pmatrix} + h_{12}^0\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}T_{11}\\ T_{21}\end{pmatrix} + h_{13}^0\frac{\partial}{\partial\tau}\begin{pmatrix}T_{11}\\ T_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1(y,\tau)\\ \alpha_2(y,\tau)\end{pmatrix},\ \ x=l_0 \tag{4}$$

та умовами ідеального контакту:

$$\begin{pmatrix}T_{1j}\\ T_{2j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T_{1,\,j+1}\\ T_{2,\,j+1}\end{pmatrix},\ \ x=l_j\ ,\ (j=\overline{1, n}), \tag{5}$$

$$\lambda_j\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}T_{1j}\\ T_{2j}\end{pmatrix} = \lambda_{j+1}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}T_{1,\,j+1}\\ T_{2,\,j+1}\end{pmatrix},\ \ x=l_j\ ,\ (j=\overline{1, n}).$$

Для розв'язання задачі (2) – (5) застосуємо перетворення Фур'є на дійсній осі по змінній y. Тоді в образах Фур'є маємо задачу: побудувати обмежений на множині $I_n^+\times(0,\infty)$ розв'язок сепаратної системи рівнянь в частинних похідних:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j^2 & 0 \\ 0 & a_j^2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_{11}^j + a_j^2\sigma^2 & \alpha_{12}^j \\ \alpha_{21}^j & \alpha_{22}^j + a_j^2\sigma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1j}^* \\ f_{2j}^* \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $l_{j-1} < x < l_j$, $j = \overline{1, n}$, $y \in \mathbf{R}$, $\tau > 0$, з початковими умовами:

$$\left.\begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix}\right|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} g_{1j}^* \\ g_{2j}^* \end{pmatrix}, \quad x \in I_n^+, \ (j = \overline{1, n+1}), \tag{7}$$

крайовими умовами:

$$h_{11}^0 \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} + h_{12}^0 \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} + h_{13}^0 \frac{\partial}{\partial \tau}\begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^*(\tau) \\ \alpha_2^*(\tau) \end{pmatrix}, \quad x = l_0 \tag{8}$$

та умовами ідеального контакту:

$$\begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{1,\,j+1}^* \\ T_{2,\,j+1}^* \end{pmatrix}, \quad x = l_j, \ (j = \overline{1, n}), \tag{9}$$

$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} T_{1j}^* \\ T_{2j}^* \end{pmatrix} = \lambda_{j+1} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} T_{1,\,j+1}^* \\ T_{2,\,j+1}^* \end{pmatrix}, \quad x = l_j, \ (j = \overline{1, n}).$$

Використовуючи рівняння (6), крайову умову (8) можемо записати у вигляді:

$$\left(h_{11}^0 - h_{13}^0 \begin{pmatrix} \alpha_{11}^j + a_j^2\sigma^2 & \alpha_{12}^j \\ \alpha_{21}^j & \alpha_{22}^j + a_j^2\sigma^2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} + h_{12}^0 \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} +$$

$$+ h_{13}^0 \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_1^2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{21}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^*(\tau) \\ \alpha_2^*(\tau) \end{pmatrix} - h_{13}^0 \begin{pmatrix} f_{1j}^* \\ f_{2j}^* \end{pmatrix}, \quad x = l_0 . \tag{10}$$

Далі для розв'язування задачі (6), (7), (10) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі з n точками поділу із спектральним параметром в крайових умовах, породжене такою задачею Штурма – Ліувілля:

$$\left(A_j^2 \frac{d^2}{dx^2} + (\lambda^2 E + \Gamma_j^2)\right) V_j(x, \lambda) = 0, \ (j = \overline{1, n+1}), \tag{11}$$

Γ_j^2 – додатно визначена матриця; $j = \overline{1, n+1}$,

$$\left.\left((\alpha_{11}^0 + \gamma_{11}^0\lambda^2) + (\beta_{11}^0 + \delta_{11}^0\lambda^2)\frac{d}{dx}\right) V_1(x, \lambda)\right|_{x=l_0} = 0,$$

$$V_{n+1}(x, \lambda)\big|_{x=\infty} < \infty, \tag{12}$$

$$\left(\alpha_{j1}^k + \beta_{j1}^k \frac{d}{dx}\right) V_k(x, \lambda) - \left(\alpha_{j2}^k + \beta_{j2}^k \frac{d}{dx}\right) V_{k+1}(x, \lambda) = 0,$$

$$x = l_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = 1, 2 . \tag{13}$$

Визначимо пряме F_{n^+} та обернене $F_{n^+}^{-1}$ перетворення Фур'є ($n+1$)-шарового напівпростору із спектральним параметром в крайових умовах і в умовах спряження наступним чином:

$$F_{n^+}[f](\lambda) = \int_{l_0}^{\infty} U^*(\xi, \lambda)\, f(\xi)\, d\xi + \left(\gamma_{11}^0 f_1(l_0) + \delta_{11}^0 f_1'(l_0)\right) \equiv \hat{f}(\lambda), \tag{14}$$

$$F_{n^+}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty} \lambda U(x, \lambda)\, \hat{f}(\lambda)\, d\lambda \equiv f(x) . \tag{15}$$

Тут

$$U = \sum_{j=1}^{n} \Theta(x - l_{j-1})\, \Theta(l_j - x)\, U_j + \Theta(x - l_n) U_{n+1},$$

$$U^* = \sum_{j=1}^{n} \Theta(x - l_{j-1})\, \Theta(l_j - x)\, U_j^* + \Theta(x - l_n) U_{n+1}^*$$

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \Theta(x - l_{j-1}) \Theta(l_j - x) f_j(\xi) + \Theta(x - l_n) f_{n+1}(\xi),$$

$$A_j^2=\begin{pmatrix} a_j^{-2} & 0 \\ 0 & a_l^2 \end{pmatrix},\quad U_j=\varphi_j\cdot\tilde{\varphi}_1^{-1}-\psi_j\cdot\tilde{\psi}_1^{-1},\quad (j=\overline{1,n+1}),$$

$$\tilde{U}_k=\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_1 & \tilde{\psi}_1\end{pmatrix}\Omega_k^{-1}\begin{pmatrix} O \\ E \end{pmatrix}A_k^{-2},\ (k=\overline{1,n+1}),$$

$\Theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

При цьому

$$\varphi_{n+1}(x,\lambda)=\exp(q_{n+1}\,x\,i),$$

$$\psi_{n+1}(x,\lambda)=\exp(-q_{n+1}\,x\,i),$$

де

$$q_j=\sqrt{A_j^{-2}(\lambda^2E+\Gamma_j^2)},\quad (j=\overline{1,n+1}),$$

причому під квадратним коренем із матриці $A_j^{-2}(\lambda^2E+\Gamma_j^2)$ беремо ту гілку кореня, яка для діагональної матриці дає значення:

$$\sqrt[0]{\begin{pmatrix}\mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}.$$

Інші пари φ_n, ψ_n, …, φ_1, ψ_1 визначаються по індукції умовами спряження (12). Крім того,

$$\Omega_h=\begin{pmatrix}\varphi_k & \psi_k \\ \varphi_k' & \psi_k'\end{pmatrix},\ (k=\overline{1,n+1}),$$

$$\tilde{\varphi}_1=\left((\alpha_{11}^0+\lambda^2\gamma_{11}^0)\frac{d}{dx}+(\beta_{11}^0+\lambda^2\delta_{11}^0)\right)\varphi_1(x,\lambda)\Big|_{x=l_0},$$

$$\tilde{\varphi}_1=\left((\alpha_{11}^0+\lambda^2\gamma_{11}^0)\frac{d}{dx}+(\beta_{11}^0+\lambda^2\delta_{11}^0)\right)\psi_1(x,\lambda)\Big|_{x=l_0},$$

$$M_{k1}=\begin{pmatrix}\beta_{11}^k & \alpha_{11}^k \\ \beta_{21}^k & \alpha_{21}^k\end{pmatrix},\ k=\overline{1,n+1}.$$

Визначимо оператор B рівністю:

$$\mathrm{B}=\sum_{j=1}^{n}\Theta(x-l_{j-1})\,\Theta(l_j-x)\mathrm{B}_k+\Theta(x-l_n)\mathrm{B}_{n+1},$$

$$\mathrm{B}_j=A_j^2\frac{d^2}{dx^2}+\Gamma_j^2,\quad (j=\overline{1,n+1}).$$

Основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора B має вигляд:

$$F_{n^+}[\mathrm{B}(f)](\lambda)=-\lambda^2\hat{f}(\lambda)-(\beta_{11}^0f_1(l_0)+\alpha_{11}^0f_1^j(l_0)+\delta_{11}^0A_1^2f_1''(l_0)+\gamma_{11}^0A_1^2f_1''(l_0))-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_1 & \tilde{\psi}_1\end{pmatrix}\Omega_k^{-1}(l_k,\lambda)\cdot M_{k1}^{-1}\left(\begin{pmatrix}\beta_{21}^k & \alpha_{21}^k \\ \beta_{22}^k & \alpha_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{k+1}(l_k) \\ f_{k+1}'(l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta_{11}^k & \alpha_{11}^k \\ \beta_{12}^k & \alpha_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_k(l_k) \\ f_k'(l_k)\end{pmatrix}\right).\quad (16)$$

Доведення основної тотожності інтегрального перетворення диференціального оператора (16) проводиться за методикою, запропонованою в роботі [4].

Виберемо параметри спектральної задачі Штурма – Ліувілля (11) – (13) наступним чином:

$$A_j^2=\begin{pmatrix}a_j^2 & 0 \\ 0 & a_j^2\end{pmatrix},$$

$$\Gamma_j^2=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^j+a_j^2\sigma^2 & \alpha_{12}^j \\ \alpha_{21}^j & \alpha_{22}^j+a_j^2\sigma^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{n+1}+a_{n+1}^2\sigma^2 & \alpha_{12}^{n+1} \\ \alpha_{21}^{n+1} & \alpha_{22}^{n+1}+a_{n+1}^2\sigma^2\end{pmatrix},$$

вважаючи, що власні числа матриць Γ_j^2, $j=\overline{1,n}$, невід'ємні.

Параметри в крайових умовах (12) обрані таким чином:

$$\alpha_{11}^0=h_{12}^0E,\ \beta_{11}^0=h_{11}^0E,\ \gamma_{11}^0=-h_{13}^0E,\ \delta_{11}^0=0,\quad (17)$$

а параметри в умовах контакту (10) визначені умовами:

$$\alpha_{11}^k=0,\ \beta_{11}^k=E,\ \alpha_{12}^k=0,\ \beta_{12}^k=E,$$

$$\alpha_{21}^k=\lambda_kE,\ \beta_{21}^k=0,\ \alpha_{22}^k=\lambda_{k+1}E,\ \beta_{22}^k=0,\quad (18)$$

E – одинична матриця 2-го порядку.

В образах Фур'є задача (6), (7), (10) набуває вигляду:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\hat{T}_1^*\\ \hat{T}_2^*\end{pmatrix} = -\left(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2)\right)\begin{pmatrix}\hat{T}_1^*\\ \hat{T}_2^*\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f_1^*\\ f_2^*\end{pmatrix} + h_{13}^0\begin{pmatrix}f_1^*\\ f_2^*\end{pmatrix}(l_0) - \begin{pmatrix}\alpha_1^*(\tau)\\ \alpha_2^*(\tau)\end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\left.\begin{pmatrix}\hat{T}_1^*\\ \hat{T}_2^*\end{pmatrix}\right|_{x=0} = \begin{pmatrix}\hat{g}_1^*\\ \hat{g}_2^*\end{pmatrix}, \tag{20}$$

де прийнято позначення

$$A_{n+1}(\sigma^2) = \begin{pmatrix}\alpha_{11}^{n+1} + a_{n+1}^2\sigma^2 & \alpha_{12}^{n+1}\\ \alpha_{21}^{n+1} & \alpha_{22}^{n+1} + a_j^{n+1}\sigma^2\end{pmatrix}.$$

Для спрощення викладок, неоднорідність правої частини системи (19) позначимо через $\begin{pmatrix}h_1(\tau,\lambda,\sigma)\\ h_2(\tau,\lambda,\sigma)\end{pmatrix}$. Для розв'язання системи (19), (20) знайдемо зображення:

$$\begin{pmatrix}\hat{T}_1^*\\ \hat{T}_2^*\end{pmatrix} = \exp(-(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2))\tau)\cdot\begin{pmatrix}\hat{g}_1^*\\ \hat{g}_2^*\end{pmatrix} +$$

$$+\int_0^\tau \exp(-(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2))(\tau-\xi))\cdot\begin{pmatrix}h_1(\xi,\lambda,\sigma)\\ h_2(\xi,\lambda,\sigma)\end{pmatrix}d\xi\,. \tag{21}$$

Застосовуючи до знайденого розв'язку $\hat{T}^*$ обернене перетворення Фур'є по x і обернене перетворення Фур'є по y на всій дійсній осі, знаходимо для вектора $\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\Theta(x-l_{j-1})\Theta(l_j-x)\begin{pmatrix}T_{1j}\\ T_{2j}\end{pmatrix} + \Theta(x-l_n)\begin{pmatrix}T_{1,n+1}\\ T_{2,n+1}\end{pmatrix}$$

представлення

$$\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix} = \int_{l_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(\xi,x,y,\eta,\tau)A^{-2}g(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} H^0(x,y,\eta,\tau)\gamma_{11}^0\,g_1(l_0,\eta)\,d\eta +$$

$$+\int_0^\tau\int_{l_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(\xi,x,y,\eta,\tau-\zeta)A^{-2}f(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\int_0^\tau\int_{-\infty}^{\infty} H^0(x,y,\eta,\tau-\zeta)\left(\gamma_{11}^0 f_1(l_0,\eta,\zeta) - a_0(\eta,\zeta)\right)d\zeta\,d\eta\,, \tag{22}$$

$$H(\xi,x,y,\eta,\tau) = \frac{1}{2\pi^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-i\sigma(y-\eta)}\,U(x,\lambda)\,e^{-(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2)\tau)}\,U^*(\xi,\lambda)\,d\sigma\,d\lambda\,,$$

$$H^0(x,y,\eta,\tau) = \frac{1}{2\pi^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-i\sigma(y-\eta)}\,U(x,\lambda)\,e^{-(\lambda^2 + A_{n+1}(\sigma^2)\tau)}\,d\sigma\,d\lambda\,.$$

Таким чином, температурне поле пластинки можна знайти за формулою (1), яку поширюємо на всі шари пластинки, а температурні впливи визначаємо за формулою (22).

Список використаних джерел

1. Комаров Г. М. Скінченні гібридні інтегальні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Комаров Г. М., Ленюк М. П., Мороз В. В. – Чернівці : Прут, 2001. – 228 с.
2. Котенко Н. В. О динамической задаче термоупругости / Н. В. Котенко, М. П. Ленюк // Прикладная математика. – 1974. – Вып. 3. – С. 43 – 51.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Шилов Г. Е. – М. : Наука, 1965. – 398 с.
4. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметра в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці : Рута, 2006. – Вип. 314 – 315. Математика. – С. 105 – 113.